(وَقُلِ اعْمَلُواْ فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُمْ وَرَسُولُهُ وَالْمُؤْمِنُونَ)

شرح كامل لمقرر الإحصاء ١٠١

ملخص وشرح للمقرر المعتمد من قبل جامعة الملك عبد العزيز بجدة

المقرر الجامعي: الإحصاء لطلاب الدراسات الاقتصادية والإدارية

تأليف: أ.د. جلال الصياد / أ.د. عبد الحميد ربيع / أ. عادل سمرة

Saudi Universities Student Association www.Ksa-Uvi.Com

إعداد وتقديم

حسان علي الطيار

١٤٢٦هـ / ١٤٢٧هـ

نحذر جميع المكتبات وضعاف النفوس ومن أراد الدنيا وعكف عن الآخرة من بيع هذا العمل أو الاتجار به بأي صورة من الصور فإنه وقف لله تعالى وعلم ينتفع به وبذلك أصبح حقاً لكل مسلم ومسلمة أراد به العلم والتعلم مع الاحتفاظ الكامل بالحق الأدبي. فمن خالف ذلك فإن الله حسبنا وهو خصمه يوم العرض الأكبر، اللهم قد بلغت، اللهم فأشهد.

Saudi Universities Student Association www.Ksa-Uvi.Com

الإحصاء ١٠١

ويتكون المقرر من ثلاثة أجزاء رئيسية وهي

أولاً: الإحصاء.

وينقسم إلى أربعة أقسام، وهي:

١- الجداول التكرارية.
٢- الارتباط والانحدار.
٣- السلاسل الزمنية (معادلة خط الاتجاه العام).
٤- الأرقام القياسية.

ثانياً: الاحتمالات.

وينقسم إلى سبعة أقسام (مبادئ وتوزيعات)، وهي:

١- توزيع ذات الحدين (نسبة / عدد).
٢- توزيع بواسون (معدل / زمن).
٣- التوزيع الطبيعي (متوسط توزيع / انحراف معياري).
٤- توزيع المعاينة للمتوسط.
٥- توزيع المعاينة للنسبة.
٦- مبادئ الاحتمالات – قاعدة الجمع (أو).
٧- مبادئ الاحتمالات – قاعدة الضرب (و).

ثالثاً: العينات.

وينقسم إلى قسمين، وهي:

١- التقدير واختبارات الفروض للمتوسط.
٢- التقدير واختبارات الفروض للنسبة.

Saudi Universities Student Association www.Ksa-Uvi.Com

أولاً: الإحصاء

١- الجداول التكرارية

أقسامها:

١. **بيانات مبوبة:** أي أن بياناتها تقدم على هيئة جداول.
٢. **بيانات غير مبوبة:** أي أن بياناتها تقدم على هيئة فردية بدون جداول.

خصائصها:

١. يلاحظ وجود شرطة (-) على يمين أرقام خانة الفئة.
٢. تتكون من خانتين، تسمى الأولى (الفئة) وتسمى الثانية (التكرار f).
٣. تتصاعد الأرقام في خانة (الفئة) بشكل متساوي، ويسمى ذلك الفارق الثبت باسم (طول الفئة (أو) عرض الفئة) ويرمز له بالرمز (h).

مفرداتها (المطاليب):

١. **الوسط الحسابي:** ويرمز له بالرمز ($\bar{X}$) وتسمى (إكس بار) حيث لا يمكن الحصول عليه إلا من خلال جدول مقابل للجدول المعطى في السؤال، وسيأتي شرح ذلك لاحقاً.
٢. **الانحراف المعياري:** ويرمز له بالرمز (S) حيث لا يمكن الحصول عليه إلا من خلال جدول مقابل للجدول المعطى في السؤال، وسيأتي شرح ذلك لاحقاً. إضافة إلى أنه لا يمكن الوصول إلى الانحراف المعياري ما لم يتم الحصول على الوسط الحسابي من قبل.
٣. **المنوال ويسمى (الرقم الشائع) أو (الرقم الأكثر شيوعاً) أو (الرقم الأكثر تكراراً):** ويرمز له بالرمز (D) حيث لا يشترط أي جداول للحصول عليه، وسيأتي ذكر ذلك بشكل مفصل.
٤. **الوسيط:** ويرمز له بالرمز (M) ويتم الحصول عليه من خلال جدول خاص يتم استقاء معلوماته من الجدول المعطى بالأصل في السؤال، وسيأتي الحديث عن ذلك بشكل مفصل.
٥. **معامل الاختلاف ويسمى (مقياس التشتت النسبي):** ويرمز له بالرمز (C.V.) ويشترط للوصول إليه إيجاد قيمة الوسط الحسابي ($\bar{X}$) والانحراف المعياري (S)، حيث يتم إيجاده بقسمة الانحراف المعياري على الوسط الحسابي مضروباً في (١٠٠). وسيأتي ذكر ذلك بشكل مفصل.
٦. **معامل الالتواء ويسمى (دراسة تماثل التوزيع):** ويرمز له بالرمز (S.K.) ويشترط للوصول إليه إيجاد قيمة الوسط الحسابي ($\bar{X}$) والانحراف المعياري (S) وكذلك إيجاد قيمة المنوال (D) أو الوسيط (M) حسب نوع الالتواء المطلوب، وسيأتي ذكر ذلك بشكل مفصل.

ملاحظة: يرمز إلى المجموع بالرمز ($\sum$) وتسمى (سيجما) ويقصد بها جمع مجموعة من الأرقام أو أرقام عمود محدد أو صف محدد.

وللوصول إلى الوسط الحسابي ($\bar{X}$) والانحراف المعياري (S) فإن ما نقوم به هو جعل الجدول المعطى لنا بشكل عمودي والقيام ببعض العمليات عليه وهي على النحو التالي:

١. نقوم بتكوين جدول عمودي عوضاً عن الأفقي المعطى.
٢. يتكون الجدول من خمس خانات وتشمل:
   - **العمود الأول:** ويسمى (الفئة) ويتم رصد بياناته كما هي في الجدول الأفقي المعطى أصلاً في السؤال.
   - **العمود الثاني:** ويسمى (التكرار f) ويتم رصد بياناته كما هي في الجدول الأفقي المعطى في السؤال.
   - **العمود الثالث:** ويسمى مركز الفئات ويرمز له بالرمز (X)، وهو حاصل جمع الفئة المقابلة مع التي تليها والقسمة على (٢).
   - **العمود الرابع:** ويرمز له بالرمز (f X) وهو حاصل ضرب العمود الثاني (التكـــرار f) في العمود الثالث (مركز التكرار X)
   - **العمود الخامس:** ويرمز له بالرمز (X^2f) وهو حاصل ضرب العمود الرابع (f X) في العمود الثالث (X).

ولبيان ذلك نستعرض المثال التالي:

تمثل المعلومات التالية مجموعة من البيانات الإحصائية من خلال الفئة والتكرار:

الفئة	50 -	60 -	70 -	80 -	90 -	المجموع
التكرار f	10	15	20	10	5	60

قم بعمل الجدول المقارن من خلال ما ذكر أعلاه.

الفئة	التكرار f	مركز الفئة X	f X	X^2f
50 -	10	(50+60)/2= 55	10*55= 550	55*550= 30250
60 -	15	65	975	63375
70 -	20	75	1500	112500
80 -	10	85	850	72250
90 -	5	95	425	40375
	60		4300	318750
	مجموع f ويرمز له بالرمز $\sum f$		مجموع f X ويرمز له بالرمز $\sum fX$	مجموع X^2f ويرمز له بالرمز $\sum X^2f$

من هذا الناتج يمكن الحصول على الوسط الحسابي.

من هذا الناتج يمكن الحصول على الانحراف المعياري.

إذاً: **طول الفئة (أو) عرض الفئة**: هو الفارق بين الفئة الأولى والفئة الثانية.

مركز الفئة: هو مجموع الفئة والفئة التالية لها مقسوماً الناتج على (٢).

(١) الوسط الحسابي

مجموع عمود (حاصل ضرب مركز الفئة × التكرار) مقسوماً على مجموع عمود (التكرار)

$$\bar{X} = \frac{\sum fX}{\sum f}$$

(٢) الانحراف المعياري

الجذر التربيعي لمجموع عمود حاصل ضرب (مركز الفئة × التكرار × مركز الفئة) مقسوماً على مجموع عمود (التكرار) مضروباً في مربع الوسط الحسابي

$$S = \sqrt{\frac{\sum X^2f}{\sum f} - (\bar{X})^2}$$

(٣) المنوال (D)

ويسمى أيضاً بـــ(الرقم الشائع) / (الرقم الأكثر شيوعاً) / (الرقم الأكثر تكراراً)، فإنه وللوصول إليه لابد لنا مـــن توفر عدد من العناصر وهي:

١. (h): طول الفئة / عرض الفئة.
٢. أعلى تكرار للفئة المنوالية (أكبر رقم في عمود/صف التكرار f).
٣. (Δ1): أعلى تكرار – التكرار السابق له.
٤. (Δ2): أعلى تكرار – التكرار اللاحق له.
٥. (L): فئة التكرار الأعلى (الرقم المقابل في حقل الفئة لأكبر رقم في عمود/صف التكرار f).

ومن ثم تطبيق قانون الحصول على المنوال (D)

$$D = L + \frac{\Delta 1}{\Delta 1 + \Delta 2} * h$$

(٤) الوسيط (M)

لابد من عمل جدول جديد يتكون من خانتي الفئة والتكرار ويتم الحصول منه على عمود جديد يسمى (تكرار مجمع صاعد) حيث لابد أن يكون آخر رقم ناتج في العمود الجديد مساوياً لمجموع عمود التكرار، وإلا فإن هناك خلل وخطأ في العمل. ويتم ذلك على النحو التالي. (سوف يبين المثال التالي ما سيلي في الشرح أدناه):

١. يكون جدول من خانة الفئة ثم خانة التكرار ثم خانة تكرار مجمع صاعد.
٢. توضع بيانات عمود الفئة والتكرار كما هي.
٣. يتم كتابة الرقم الموجود في أول سطر من عمود التكرار كما هو في العمود الجديد.
٤. يضاف الرقم الجديد إلى الرقم التالي (السطر الثاني) في عمود التكرار وتسجل النتيجة في العمود الجديد.
٥. تكرر العملية كاملة على عموم بيانات الجدول إلى حين الانتهاء والحصول على آخر رقم يتم تسجيله في العمود الجديد ويكون مساوياً لمجموع عمود التكرار.

الفئة	التكرار f	تكرار مجمع صاعد
50 -	10	10
60 -	15	25
70 -	20	45
80 -	10	55
90 -	5	60
	60	

وللوصول إلى الوسيط من خلال هذا الجدول فلابد لنا من توفر عدد من العناصر وهي:

١. ترتيب الوسيط (C1): ويتم الحصول عليه من خلال قسمة مجموع عمود التكرار على (٢). (وهو في الجدول السابق = ٦٠ ÷ ٢ = ٣٠).

$$\text{ترتيب الوسيط (C1)} = \frac{\sum f}{2}$$

٢. التكرار السابق لترتيب الوسيط (C2): وهو الرقم الموجود في خانة (تكرار مجمع صاعد) والذي يسبق ترتيب الوسيط. (وهو في الجدول السابق ٢٥).
٣. تكرار فئة الوسيط (C3): وهو أكبر رقم في عمود/صف التكرار f. (وهو في الجدول السابق ٢٠).
٤. فئة الوسيط (L): وهو الرقم المقابل في حقل الفئة لأكبر رقم في عمود/صف التكرار f. (وهو في الجدول السابق ٧٠ –).
٥. طول الفئة (h): وهو مقدار الزيادة الثابت في أعداد الفئة. (وهو في الجدول السابق ١٠).

Saudi Universities Student Association www.Ksa-Uvi.Com

ومن ثم تطبيق قانون الحصول على الوسيط (M)

$$M = L + \frac{C1 - C2}{C3} * h$$

(٥) معامل الاختلاف (مقياس التشتت النسبي) (C.V.)

حيث لابد من توفر الوسط الحسابي ($\bar{X}$) والانحراف المعياري (S) وذلك للوصول إلى قيمة معامل الاختلاف من خلال تطبيق القانون التالي:

$$C.V. = \frac{S}{\bar{X}} * 100$$

(٦) معامل الالتواء (دراسة تماثل التوزيع) (SK)

ويأتي ذلك في نوعين من الدراسة:

(١) باستخدام المنوال (D): حيث لابد من توفر الوسط الحسابي ($\bar{X}$) والانحراف المعياري (S) والمنوال (D) وذلك للوصول إلى قيمة معامل الاختلاف من خلال تطبيق القانون التالي:

$$S.K.1 = \frac{\bar{X} - D}{S}$$

(٢) باستخدام الوسيط (M): حيث لابد من توفر الوسط الحسابي ($\bar{X}$) والانحراف المعياري (S) والوسيط (M) وذلك للوصول إلى قيمة معامل الاختلاف من خلال تطبيق القانون التالي:

$$S.K.2 = \frac{3(\bar{X} - M)}{S}$$

نتائج الالتواء:

وتأتي نتائج الالتواء في ثلاث صور، وهي على النحو التالي:

١. إذا كان ناتج الالتواء (SK) يساوي (صفر): ويكون التوزيع في هذه الحالة:
   - التوزيع متماثل.
   - قيمة الوسط الحسابي ($\bar{X}$) = قيمة الوسيط (M) = قيمة المنوال (D).
٢. إذا كان ناتج الالتواء (SK) موجباً: ويكون التوزيع في هذه الحالة:
   - التوزيع مائلاً نحو اليمين.
   - قيمة الوسط الحسابي ($\bar{X}$) أكبر من قيمة الوسيط (M) أو قيمة المنوال (D).
   - قيمة الوسيط (M) أو قيمة المنوال (D) أصغر من قيمة الوسط الحسابي ($\bar{X}$).
٣. إذا كان ناتج الالتواء (SK) سالباً: ويكون التوزيع في هذه الحالة:
   - التوزيع مائلاً نحو اليسار.
   - قيمة الوسط الحسابي ($\bar{X}$) أصغر من قيمة الوسيط (M) أو قيمة المنوال (D).
   - قيمة الوسيط (M) أو قيمة المنوال (D) أكبر من قيمة الوسط الحسابي ($\bar{X}$).

Saudi Universities Student Association www.Ksa-Uvi.Com

تمرين (١): يوضح التوزيع التكراري لعينة من أرصدة الحسابات بأحد البنوك بآلاف الريالات:

الفئة	4 -	8 -	12 -	16 -	20 -	المجموع
التكرار f	10	15	20	10	5	60

المطلوب:

(١) احسب الوسط الحسابي. (٢) احسب الانحراف المعياري.

(٣) احسب رقم الرصيد الشائع. (٤) احسب الوسيط.

الحل

نقوم بعمل الجدول العمودي المسمى (جدول إكس) لاستخراج الوسط الحسابي والانحراف المعياري:

الفئة	التكرار f	مركز الفئة X	f X	X^2f
4 -	10	(4+8)/2= 6	10∗6= 60	6∗60= 360
8 -	15	10	150	1500
12 -	20	14	280	2920
16 -	10	18	180	3240
20 -	5	22	110	2420
	60		780	11440
	$\sum f$		$\sum f X$	$\sum X^2f$

(١) حساب الوسط الحسابي:

الوسط الحسابي $$\bar{X} = \frac{\sum f X}{\sum f}$$

$$\bar{X} = \frac{780}{60} = 13$$

(٢) حساب الانحراف المعياري:

الانحراف المعياري $$S = \sqrt{\frac{\sum X^2 f}{\sum f} - (\bar{X})^2}$$

$$S = \sqrt{\frac{11440}{60} - (13)^2} = 4.65$$

(٣) حساب رقم الرصيد الشائع: ويقصد به (المنوال D):

المنوال $$D = L + \frac{\Delta 1}{\Delta 1 + \Delta 2} * h$$

(1) $\Delta 1 = 20 - 15 = 5$

(2) $\Delta 2 = 20 - 10 = 10$

$$D = 12 + \frac{5}{5 + 10} * 4 = 13.33$$

(٤) حساب الوسيط:

نقوم بعمل الجدول العمودي للحصول على (تكرار مجمع صاعد) ومن ثم تطبيق القانون:

Saudi Universities Student Association www.Ksa-Uvi.Com

الفئة	التكرار f	تكرار مجمع صاعد
4 -	10	10
8 -	15	25
12 -	20	45
16 -	10	55
20 -	5	60
	60	

وللحصول على ترتيب الوسيط نطبق القانون:

$$\text{ترتيب الوسيط} \quad C1 = \frac{\sum f}{2} = \frac{60}{2} = 30$$

- ترتيب الوسيط (C1) = ٣٠
- التكرار السابق لترتيب الوسيط (C2) = ٢٥
- تكرار فئة الوسيط (C3) = ٢٠
- فئة الوسيط (L) = ١٢
- طول الفئة (h) = ٤

$$\text{الوسيط} \quad M = L + \frac{C1 - C2}{C3} * h$$

$$M = 12 + \frac{30 - 25}{20} * 4 = 13$$

تمرين (٢): يوضح التوزيع التكراري لعينة من البيانات:

الفئة	10 -	20 -	30 -	40 -	50 -	المجموع
التكرار f	10	20	40	20	10	100

المطلوب:

١- احسب الوسط الحسابي.
٢- احسب الانحراف المعياري.
٣- احسب المنوال (الرقم الشائع).
٤- احسب الوسيط.

الحـــــــــل

نقوم بعمل الجدول العمودي المسمى (جدول إكس) لاستخراج الوسط الحسابي والانحراف المعياري:

الأجور	عدد الموظفين f	مركز الفئة X	f X	X^2f
10 -	10	(10+20)/2= 15	10∗15= 150	15∗150= 2250
20 -	20	25	500	12500
30 -	40	35	1400	49000
40 -	20	45	900	40500
50 -	10	55	550	30250
	100		3500	136750
	∑f		∑ f X	∑ X^2f

(١) حساب الوسط الحسابي:

$$\text{الوسط الحسابي} \quad \bar{X} = \frac{\sum f X}{\sum f}$$

$$\bar{X} = \frac{3500}{100} = 35$$

(٢) حساب الانحراف المعياري:

الانحراف المعياري $$S = \sqrt{\frac{\sum X^2 f}{\sum f} - (\bar{X})^2}$$

$$S = \sqrt{\frac{136750}{100} - (8)^2} = 36.10$$

(٣) حساب رقم الرصيد الشائع: ويقصد به (المنوال D):

المنوال $$D = L + \frac{\Delta 1}{\Delta 1 + \Delta 2} * h$$

(1) $\Delta 1 = 20 - 15 = 5$
(2) $\Delta 2 = 20 - 10 = 10$

$$D = 12 + \frac{5}{5 + 10} * 4 = 13.33$$

(٤) حساب الوسيط:

نقوم بعمل الجدول العمودي للحصول على (تكرار مجمع صاعد) ومن ثم تطبيق القانون:

الفئة	التكرار f	تكرار مجمع صاعد
10 -	10	10
20 -	20	30
30 -	40	70
40 -	20	90
50 -	10	100
	100	

وللحصول على ترتيب الوسيط نطبق القانون:

ترتيب الوسيط $$C1 = \frac{\sum f}{2} = \frac{100}{2} = 50$$

((فيكون لدينا)):

- ترتيب الوسيط (C1) = ٥٠
- التكرار السابق لترتيب الوسيط (C2) = ٣٠
- تكرار فئة الوسيط (C3) = ٤٠
- فئة الوسيط (L) = ٣٠
- طول الفئة (h) = ١٠

الوسيط $$M = L + \frac{C1 - C2}{C3} * h$$

$$M = 30 + \frac{50 - 30}{40} * 10 = 35$$

تمرين (٣): يوضح التوزيع التكراري لعينة من أجور الموظفين بآلاف الريالات:

الأجور	3 -	5 -	7 -	9 -	11 -	المجموع
عدد الموظفين f	10	20	40	20	10	100

Saudi Universities Student Association www.Ksa-Uvi.Com

المطلوب:

١. احسب معامل الاختلاف (مقياس التشتت النسبي).
٢. أدرس تماثل التوزيع (أوجد معامل الالتواء) باستخدام المنوال.
٣. أدرس تماثل التوزيع (أوجد معامل الالتواء) باستخدام الوسيط.

الـــحـــــــــل

ملاحظة هامة: إذا كان ما قبل وما بعد أكبر تكرار متساويان فإن تماثل التوزيع (معامل الالتواء) متماثل، أي أن نتيجة لابد وأن تكون صفراً، ويتساوى معه الوسط الحسابي مع الوسيط والمنوال.

نقوم بعمل الجدول العمودي المسمى (جدول إكس) لاستخراج الوسط الحسابي والانحراف المعياري:

الأجور	عدد الموظفين f	مركز الفئة X	f X	X^2f
3 -	10	(3+5)/2= 4	10∗4= 40	4∗40= 160
5 -	20	6	120	720
7 -	40	8	320	2560
9 -	20	10	200	2000
11 -	10	12	120	1440
	100		800	6880
	∑f		∑f X	∑ X^2f

حساب الوسط الحسابي:

الوسط الحسابي $\quad \bar{X} = \frac{\sum f X}{\sum f}$

$$\bar{X} = \frac{800}{100} = 8$$

حساب الانحراف المعياري:

الانحراف المعياري $\quad S = \sqrt{\frac{\sum X^2 f}{\sum f} - (\bar{X})^2}$

$$S = \sqrt{\frac{6880}{100} - (8)^2} = 2.19$$

(١) حساب معامل الاختلاف (C.V.): حيث بعد استخراج الوسط الحسابي والانحراف المعياري يمكن الحصول على معامل الاختلاف بتطبيق القانون التالي:

$$C.V. = \frac{S}{\bar{X}} * 100$$

$$C.V. = \frac{2.19}{8} * 100 = 27.38\ \%$$

(٢) دراسة تماثل التوزيع (معامل الالتواء SK) باستخدام المنوال (D): حيث لابد أولاً أن نقوم باحتساب قيمة المنوال من خلال الخطوات التالية:

المنوال $\quad D = L + \frac{\Delta 1}{\Delta 1 + \Delta 2} * h$

(1) $\Delta 1 = 40 - 20 = 20$
(2) $\Delta 2 = 40 - 20 = 20$

Saudi Universities Student Association www.Ksa-Uvi.com

$$D = 7 + \frac{20}{20+20} * 2 = 8$$

يتم التعويض واستخراج معامل الالتواء باستخدام المنوال:

$$S.K.1 = \frac{\bar{X} - D}{S}$$

$$= \frac{8-8}{2.19} = 0$$

إذا التوزيع متماثل

(٣) دراسة تماثل التوزيع (معامل الالتواء SK) باستخدام الوسيط (M): حيث نقوم أولاً باحتساب قيمة الوسيط من خلال عمل الجدول العمودي للحصول على (تكرار مجمع صاعد) ومن ثم تطبيق القانون:

الفئة	التكرار f	تكرار مجمع صاعد
3 -	10	10
5 -	20	30
7 -	40	70
9 -	20	90
11 -	10	100
	100	

وللحصول على ترتيب الوسيط نطبق القانون:

ترتيب الوسيط $C1 = \frac{\sum f}{2} = \frac{100}{2} = 50$

((فيكون لدينا)):

- ترتيب الوسيط = ٥٠
- التكرار السابق لترتيب الوسيط = ٣٠
- تكرار فئة الوسيط = ٤٠
- فئة الوسيط (L) = ٧
- طول الفئة (h) = ٢

الوسيط $M = L + \frac{C1 - C2}{C3} * h$

$$M = 7 + \frac{50-30}{40} * 2 = 8$$

يتم التعويض واستخراج معامل الالتواء باستخدام الوسيط:

$$S.K.2 = \frac{3(\bar{X} - M)}{S}$$

$$= \frac{3(8-8)}{2.19} = 0$$

إذا التوزيع متماثل

تمرين (٤): يوضح التوزيع التكراري لعينة من إنفاق الأسر بآلاف الريالات:

الإنفاق	0 -	4 -	8 -	12 -	16 -	المجموع
عدد الأسر f	3	9	10	14	4	40

Saudi Universities Student Association www.Ksa-Uvi.Com